Paris 6 Master Mathbio / ENS / Master MVA 2017-2018
E. Tanré
R. Veltz

Examen - Méthodes mathématiques en neuroscience
9 janvier 2018

Questions de cours

1. Comment simulez-vous un processus de Poisson d'intensité constante ?
2. Comment simulez-vous un processus de Poisson d'intensité donnée $(r_t, 0 \leq t \leq T)$? Donner (sans preuve) le générateur infinitésimal de ce processus.
3. Donner les conditions pour une bifurcation pli pour un problème scalaire.
4. Analyser la forme normale tronquée de la bifurcation de Hopf.

Problème

Préliminaires

On considère le système dynamique

$$\dot{y} = \alpha(1 - y(t)) - \beta y(t), \quad y(0) \in (0, 1) \tag{1}$$

5. Résoudre explicitement (1).
6. Donner un processus de Markov à valeurs dans $\{0, 1/N, 2/N, \cdots, (N-1)/N, 1\}$ approchant la solution de (1).
7. Généraliser lorsque (1) est remplacée par

$$\dot{y} = \alpha(t)(1 - y(t)) - \beta(t)y(t), \quad y(0) \in (0, 1) \tag{2}$$

Modèle de Fitzhugh-Nagumo

$$\begin{cases} \dot{v} = v - \dfrac{v^3}{3} - w + I_{\text{ext}} \\ \tau\dot{w} = v + a - bw. \end{cases} \tag{3}$$

8. En vous inspirant de la question 7, proposer un PDMP qui approche la solution du système (3) .
9. Suggérer une autre perturbation stochastique au système dynamique (3) .

Etude des comportements

ROMAIN: Il y avait un soucis, il faut tau = 1 pour simplifier les calculs

10. (Bonus) Prouver que (3) a une solution définie pour tout temps si la condition initiale est assez petite en utilisant le théorème en annexe.

11. Dans le cas $b = 0$, donner le nombre de points d'équilibre en fonction de I_{ext}. Étudier leur stabilité. Peut-on observer une bifurcation de Hopf ?

12. Donner l'équation des points d'équilibre dans le cas $a = 0, b > 0$. Montrer que la courbe des bifurcations pli est contenue dans la sous-variété P de $\mathbb{R}^2$, $P = \{(b, I_{ext}) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R},\ 9b^3 I_{ext}^2 - 4b^3 + 12b^2 - 12b + 4 = 0,\ 1 - \frac{1}{b} \geq 0\}$. (Bonus) Connaissez-vous une deuxième facon de parvenir à ce resultat?

13. Toujours dans le cas $a = 0, b > 0$, donner une condition pour avoir une zero comme valeur propre double. Donner la jacobienne dans ce cas et sa forme de Jordan (ou sa forme triangulaire dans une base adaptée). (Bonus) Montrer que la forme normale de cette bifurcation dans la base (e_1, e_2) de la forme de Jordan vérifie $N((v, w)) = (AP(A), BP(A) + Q(A))$ avec $(v, w) = Ae_1 + Be_2$ et $P(0) = Q(0) = Q'(0) = 0$.

On s'intéresse maintenant aux équations suivantes:

$$(4) \qquad \begin{cases} \dot{v} = v - \dfrac{v^3}{3} - w + I_{\text{ext}} \\ \dot{w} = \epsilon(v + a - bw). \end{cases}$$

avec $\epsilon > 0$.

14. On appelle variété critique l'ensemble $S = \{(v, w) \mid f(v) = w\}$. Donner une condition suffisante pour l'existence d'une fonction $h : W_0 \to \mathbb{R}$ avec W_0 d'intérieur non vide tel que $M \equiv \{(h(w), w),\ w \in W_0\} \subset S$.

15. On suppose que M vérifie $\exists \sigma > 0$ tel que pour $w \in W_0$, $|f'(h(w))| \geq \sigma$. Prouver que pour ϵ petit, il existe une variété invariante $\mathcal{M}_\epsilon$ proche de $(h(w_0), w_0)$ pour (un) $w_0 \in W_0$:
$$\mathcal{M}_\epsilon = \{(v, w) : v = h(w, \epsilon),\ w \in \mathcal{V}(w_0)\}$$
avec $h(w, \epsilon) = h(w) + \mathcal{O}(\epsilon)$ et où $\mathcal{V}(w_0)$ désigne un voisinage de w_0.

Annexe

Théorème Si $E : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $F = \{x | E(x) \leq 0\}$, et $\dot{x} = X(x)$ une équation différentielle définie au voisinage de F, telle que $dE(x)X(x) < 0$ sur $\{x \mid E(x) = 0\}$. Alors les solutions de l'équation différentielle définie par X qui sont dans F pour $t = 0$ restent dans F pour tout t supérieur à 0. En particulier si F est compact, les solutions sont définies sur un intervalle infini à droite.